ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ НА ПЕРЕСТАНОВКАХ

А. К. Демидович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры информационных технологий в культуре
Белорусского государственного университета культуры и искусств

Пусть дано множество $G = \{1, 2, \ldots, n\}$ номеров городов и $n \times n$ – матрица расстояний между городами $C = [c_{ij}]$, где c_{ij} – расстояние или некоторые затраты на перемещение из города i в город j. Задача коммивояжера заключается в нахождении такой перестановки p^* из элементов G, что

$$f(p^*) = \min_p \sum_{i=1}^{n} c_{ip(i)}. \qquad (1)$$

Опишем перестановку p матрицей перестановок $X_p = [x_{ij}]$ с элементами

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j \neq p(i), \\ 1, & \text{если } j = p(i). \end{cases}$$

Тогда задачу коммивояжера можно сформулировать как задачу целочисленного линейного программирования. Требуется найти

$$\min_X \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (2)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \ j = 1, \cdots, n \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \ i = 1, \cdots, n \end{aligned} \qquad (3)$$

$x_{ij} \in \{0, 1\}$ для всех $i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n.$ (4)

Дополнительные ограничения строятся следующим образом. Пусть в задаче коммивояжера с n городами каждому городу с номерами 2, 3, ..., n ставится в соответствие непрерывная неотрицательная переменная u_i.. Тогда дополнительные ограничения имеют вид

$$u_i - u_j + n\, x_{ij} \le n - 1,\ i = 2, 3, \ldots, n,\ \ j = 2, 3, \ldots, n,\ \ i \ne j. \qquad (5)$$

Если в матрице C выбирать по одному элементу в каждой строке и каждом столбце, имеем задачу об оптимальном назначении. В этом случае рассматривается задача минимизации на множестве подстановок. Ограничения (5), добавленные в исходную задачу о назначениях, автоматически удаляют из допустимых частичные циклы, оставляя все полные циклы.

Переформулируем задачу коммивояжера (1) на минимум в виде эквивалентной задачи коммивояжера на максимум с измененной функцией цели. Задача будет иметь в качестве оптимальных те же самые перестановки. Для этого в качестве матрицы расстояний задачи на максимум достаточно взять матрицу расстояний A, равную $M - C$, где m_{ij} = max $\{c_{ij}\}$ по всем $i = 1, \ldots, n$ и $j = 1, \ldots, n$.

Требуется найти такую перестановку p, в которой целевая функция имеет максимум:

$$\max_p \sum_{i=1}^{n} \mathrm{a}_{ip(i)}. \qquad (6)$$

Тогда ее можно сформулировать как задачу целочисленного программирования. Найти

$$\min_X \|X - A\| \qquad (7)$$

при ограничениях (3), (4) и (5).

Здесь «длина» матрицы обозначена согласно формуле

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_{ij}\right)^2\right)^{1/2}$$

В работе [1] автором получена явная аналитическая формула решения задачи восстановления матрицы, ближайшей к заданной, по одноиндексным суммам. В препринте [2] решена задача нахождения ближайшей матрицы к заданной n-индексной матрице при ограничениях транспортного типа. Аналогичные результаты получены в статье [3] с использованием необходимых условий Лагранжа.

Для задачи (7), (3) без условия целочисленности переменных x_{ij} и (5) решение X имеет вид

$$x_{ij} = a_{ij} - \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} + \sum_{m=1}^{n} a_{im} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{km} / n - 1 \right) \Big/ n. \qquad (8)$$

Это частный случай формул из [1], когда в ограничениях транспортного типа объемы поставок и потребностей равны единице.

В большинстве эвристических алгоритмов решения задач на подстановках, в том числе для задачи о коммивояжере и задачи о назначениях, в правилах выбора очередного элемента матрицы используют непосредственно элементы матрицы расстояний C. Реже предлагают использовать «взвешенные» элементы матрицы C либо являющиеся решениями некоторой задачи на оптимум.

В отличие от них в статье предлагается решать эквивалентную задачу (7), (3) без условий (4), (5). Опишем приближенный метод решения задачи коммивояжера (7), (3) с использованием формулы (8). На его основании простой модификацией решается задача об оптимальном назначении или учитываются некоторые запреты на выбор дуг тура. Кратко алгоритм можно записать следующим образом.

Выполняем цикл по числу городов n. На каждом шаге решаем задачу нахождения матрицы, ближайшей к матрице $A_{(k)}$ с уже найденными элементами. При нахождении матрицы, ближайшей к заданной, вычисляется не более n^2 элементов x_{ij} с использованием среднего значения элементов матрицы, среднего по строке i и по столбцу j. Данное проектирование выполняется не более чем за порядка $o(n^3)$ операций.

В построенной матрице разыскивается максимальный элемент $a_{i\max\, j\max}$ по подматрице, не содержащей выбранных ранее строк и столбцов. Затем выполняется вложенный цикл по переменной $n1$ исключения строки с номером $i\max$ и столбца с номером $j\max$. Для этого осуществляется релаксационный процесс присваивания нуля элементам выбранной строки и столбца, а элементу $a_{i\max\, j\max}$ присваивается значение единица и проектирование матрицы на аффинное множество решений ограничения (3) по формуле (8). Всего таких итераций $n1 = 4n$, если не указано особо.

В результате получаем допустимый план задачи (3), который предлагается принять за приближенное решение X. В ходе решения для него строится соответствующая перестановка и тур.

Приведем результаты решения задачи коммивояжера предложенным алгоритмом. Известна задача с n = 5, для которой стратегия выбора минимального элемента матрицы приводит к самому продолжительному туру:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & \infty & 4 & 6 & 8 \\ 15 & 3 & \infty & 9 & 12 \\ 20 & 4 & 8 & \infty & 16 \\ 25 & 5 & 10 & 15 & \infty \end{bmatrix}.$$

Оптимальный тур для нее t^* = (5, 3, 4, 2, 1), $f(t^*)$ = 37.

Предлагаемым алгоритмом получена перестановка тура p^* = (5, 1, 4, 2, 3), в которой $f(p^*)$ = 37.

Для задачи с шестью городами из [5] с матрицей расстояний

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 7 & 65 & 68 & 34 & 81 \\ 19 & \infty & 22 & 27 & 59 & 29 \\ 14 & 43 & \infty & 62 & 77 & 65 \\ 76 & 53 & 64 & \infty & 6 & 51 \\ 39 & 58 & 38 & 27 & \infty & 13 \\ 46 & 67 & 27 & 11 & 38 & \infty \end{bmatrix}$$

известен оптимальный тур обхода городов t^* = (1, 2, 4, 5, 6, 3) или перестановка p^* = (2, 4, 1, 5, 6, 3), $f(p^*)$ = 94. Предлагаемым алгоритмом получено точное решение.

Задача с тринадцатью городами из [6] алгоритмом решается точно, лишь тур обхода городов оказался в противоположном направлении.

Приведем результаты решения предлагаемым алгоритмом симметрических задач коммивояжера из [4], в которых $c_{ij} = c_{ji}$.

n	*n1*	*f(t*)*	*f(t)*	*Замечания*
17	*4n*	*2 085*	*2 085*	
	5n		*2 085*	
21	*4n*	*2 707*	*2 816*	
21	*5n, 21n*		*2 816*	
21			*2 803*	*При t ~*
24	*4n*	*1 272*	*1 289*	
24	*5n*		*1 289*	*Получен иной тур*
48	*4n*	*5 046*	*5 301*	

Для задачи с 17 городами:

*t** = (16, 12, 9, 5, 2, 10, 11, 3, 15, 14, 17, 6, 8, 7, 13, 4, 1);

*p** = (16, 10, 15, 1, 2, 8, 13, 7, 5, 11, 3, 9, 4, 17, 14, 12, 6).

Для задачи с 21 городом:

*t** = (7, 8, 6, 16, 5, 9, 3, 2, 21, 15, 14, 13, 18, 10, 17, 19, 20, 11, 4, 12, 1);

t = (4, 12, 7, 8, 6, 16, 5, 9, 3, 2, 15, 14, 13, 18, 10, 21, 20, 11, 17, 19, 1).

f(t~) = 2 803 при

t~ = (7, 8, 6, 16, 5, 9, 3, 2, 15, 14, 13, 18, 10, 21, 20, 17, 19, 11, 4, 12, 1).

Для задачи с 24 городами:

*t** = (16, 11, 3, 7, 6, 24, 8, 21, 5, 10, 17, 22, 18, 19, 15, 2, 20, 14, 13, 9, 23, 4, 12, 1);

t = (12, 4, 23, 9, 13, 14, 20, 2, 15, 19, 22, 18, 17, 10, 5, 21, 3, 11, 7, 8, 24, 6, 16, 1).

Для задачи с 48 городами:

*t** = (29, 7, 28, 44, 41, 46, 18, 34, 23, 25, 3, 19, 4, 30, 38, 20, 35, 42, 39, 40, 2, 45, 43, 47, 37, 24, 15, 10, 12, 31, 5, 33, 8, 22, 21, 17, 27, 32, 9, 14, 6, 26, 36, 11, 16, 48, 13, 1);

t = (13, 48, 16, 11, 36, 6, 26, 8, 22, 14, 9, 21, 17, 27, 32, 5, 33, 31, 12, 10, 24, 15, 37, 47, 43, 45, 2, 35, 40, 39, 42, 20, 38, 30, 19, 4, 3, 25, 23, 34, 18, 46, 44, 41, 28, 7, 29, 1).

Отметим, что для задач размера нескольких десятков городов на результат решения влияла точность вычислений по алгоритму.

1. *Демидович, А. К.* Восстановление двух- и трехиндексной матриц, ближайших к заданной, по одноиндексным суммам / А. К. Демидович // Препринт ; ИМ АН БССР ; № 8 (193). – Минск, 1984. – 22 с.

2. *Демидович, А. К.* Восстановление *n*-индексной матрицы, ближайшей к заданной / А. К. Демидович // Препринт ; ИМ АН БССР ; № 4 (240). – Минск, 1986. – 20 с.

3. *Romero, D.* Easy transportation-like problems on K-dimensional arrays / D. Romero // Journal of Optimization Theory and Application. – 1990. – Vol. 51, No. 2. – P. 141–202.

4. *Grötschel, M.* Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems / M. Grötschel, O. Holland // Mathematical Programming. – 1991. – Vol. 51, No. 2. – P. 141–202.

5. *Golden, B. L.* Empirical analysis of heuristics / B. L. Golden, W. R. Start // The Travailing Salesman Problem/ Edited by E. L. Lawlere. – 1985. – P. 207–247.

6. Traveling Salesman Problem [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://developers.google.com/optimization/routing/ tsp. – Дата доступа: 10.01.2021.

РЕАЛЬНОСТЬ КАК СМЫСЛОВАЯ КАТЕГОРИЯ ТЕКСТА

А. В. Довгань,
кандидат филологических наук,
академик-секретарь отделения филологии
Международной академии образования и науки;
Национальная комиссия по стандартам государственного языка,
главный специалист отдела стандартов государственного языка
и обеспечения оценивания владения государственным языком, Украина

Понятие реальности лежит в основе любого произвольного явления, закона, свойства и др. Необходимость ее присутствия, так же, как и стабильность, непрерывность, протяженность, – главная предпосылка любого ориентирования. При этом под ориентированием мы имеем в виду не просто правильную локализацию своего места пребывания в некоей точке временно-пространственного континуума, а философско-обобщенное понимание этого слова. (Ориентирование в таком контексте представляется способом идентификации в темпоральном, топографическом или даже смысловом дискурсах.) Фактически мы говорим тут о любом позиционировании себя в условном пространстве во всех мыслимых плоскостях.

Таким образом, реальность позиционируется как некое первооснование, первоконтекст, на базе которых мы выстраиваем новые абстрактные структуры. Очерченная природа упомянутого явления обуславливает наличие таких вышеупомянутых свойств, как стабильность, непрерывность, протяженность. Последние проявляются посредством горизонтальной интерпретации.

В процессе такой интерпретации, в контексте постмодерного видения, мы наблюдаем череду объектов, находящихся на одной шкале, но как бы накладывающихся друг на друга, то есть